5.5 Circuitos

Combinações de condutores elétricos e/ou capacitores formando um ou vários caminhos fechados são circuitos. Circuitos possuem inúmeras aplicações envolvendo transporte de energia e processamento de informação. Para poder utilizar circuitos em aplicações práticas, é essencial saber calcular as correntes que haverá num circuito e os fluxos de energia. Como sempre, quando se quer fazer alguma previsão usando raciocínio, é essencial o uso de uma linguagem apropriada. Então primeiramente precisa-se ter uma linguagem para descrever o circuito que se pretende analisar. Neste caso a linguagem adequada é uma linguagem gráfica. Os elementos do circuito são representados por símbolos interligados de tal maneira que a topologia do desenho corresponda à topologia do circuito do mundo real, mas a geometria pode ser diferente. A palavra topologia[1] diz respeito à conectividade das peças, ou seja, à questão: qual elemento está ligado em qual outro. Usaremos os seguintes símbolos:

Representamos um condutor Ôhmico, cuja resistência pretendemos tratar como desprezivelmente pequena, com uma simples linha reta e chamamo-lo de *fio*.

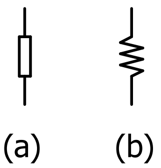


Fig. 5.5.1 Símbolos que representam resistores.

Chamaremos um condutor Ôhmico com apreciável resistência de resistor e vamos representá-lo com um dos símbolos da figura 5.5.1. Ambas as representações podem ser encontradas na literatura. A caixinha (a) é inspirada na forma geométrica de muitos resistores usados na eletrônica e o zig-zag (b) remete a um fio comprido que tem considerável resistência. A figura 5.5.2 mostra uma coleção de resistores. Alguns têm a forma de cilindro com um arame saindo de cada extremidade. É este tipo de resistor que inspirou o símbolo da figura 5.5.1 (a). A figura 5.5.2 mostra também resistores no formato SMD. Um resistor SMD tem quase o mesmo aspecto que um capacitor SMD. Desta vez eu não mostro estes elementos numa placa de circuito, mas dentro da embalagem. Esta embalagem é a fita branca com furos redondos e retangulares. O resistor fica por baixo do furo retangular. A fita tem um formato que permite alimentar uma máquina que coloca estes elementos num circuito. Na produção de equipamentos de eletrônica em larga escala, os componentes não são mais colocados manualmente numa placa de circuito.

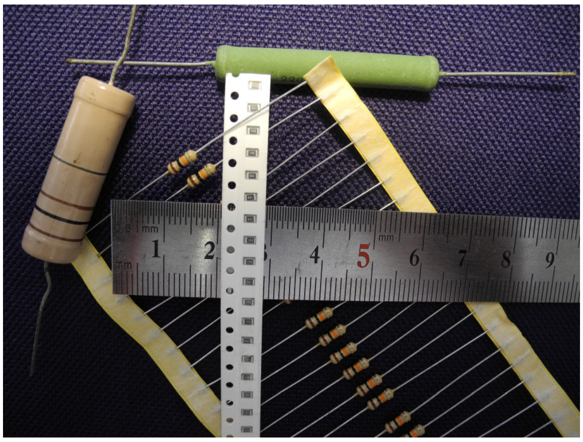


Fig. 5.5.2 Resistores. O tamanho geométrico dos resistores não está relacionado com o valor da resistência, mas com a potência máxima que pode ser dissipada no resistor sem danificá-lo. Em alguns dos resistores os valores de resistência são indicados com a ajuda de anéis coloridos. A fita branca com furos contém resistores SMD.

Muitos resistores levam marcas coloridas que indicam o valor da resistência com um código que explicamos no apêndice desta seção. Neste apêndice explicamos também uns costumes estranhos dos técnicos e engenheiros de eletrônica na hora de especificar um valor concreto de resistência num esquema de circuito.

[1] Do grego τόπος (lugar) e λόγος (razão). Os matemáticos denominam a estrutura que permite investigar continuidade e limites de topologia. A conectividade dos elementos de um circuito pode ser descrita com o conceito de continuidade de funções.

Os símbolos que representam condutores que obedecem à lei de Ohm generalizada, ou seja, as fontes elétricas, já foram introduzidas na seção anterior (fig. 5.4.4). Introduzimos os símbolos que representam capacitores na seção 4.1 com a figura 4.1.6.

Há mais um detalhe da linguagem gráfica de circuitos que precisa ser explicado. O circuito real será montado no mundo tridimensional enquanto a representação gráfica fica em duas dimensões espaciais. Muitas vezes uma ligação passa no circuito real atrás de outra ligação sem fazer contato elétrico com ela. No desenho somos às vezes forçados a representar estas ligações por linhas que se cruzam. Então neste caso é preciso expressar que não há ligação elétrica entre estes fios. Na literatura existem duas convenções para expressar a inexistência de contato elétrico. Numa, que é mais usada na literatura amadora como nas revistinhas de eletrônica da banca de jornal ou nas dicas na internet, desenha-se uma pequena volta como na figura 5.5.3.

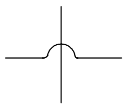


Fig. 5.5.3 Representação amadora de conexões sem contato cujas linhas se cruzam no esquema.

Na convenção mais profissional[2] desenham-se simplesmente duas linhas que se cruzam e usa-se um símbolo adicional, a saber, uma pequena bolota preta, para o caso de contato. Nesta convenção contatos em bifurcações também são indicados com esta bolota preta como na figura 5.5.4.

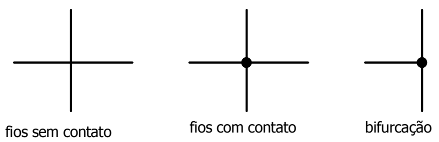


Fig. 5.5.4 Convenção para indicar contato entre ligações.

Depois destas notas a respeito da linguagem gráfica de circuitos, vamos então ao que interessa:

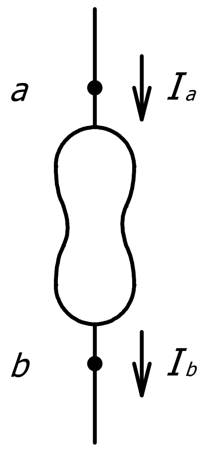


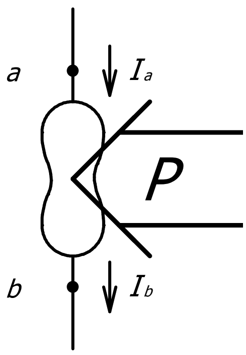
Fig. 5.5.5 Elemento genérico num circuito com corrente I_a entrando e corrente I_b saindo.

Começamos com uma consideração energética: imagine algum elemento genérico, isto é, um condutor ou um capacitor, num circuito. Na figura 5.5.5 eu mostro este elemento com um símbolo de fantasia, que não precisa ser memorizado, pois eu usá-lo-ei somente nas figuras 5.5.5 e 5.5.6. Indico também duas correntes I_a e I_b nos respectivos pontos a e b. No caso de o elemento desenhado com aquele símbolo de fantasia ser um condutor, podemos supor uma situação estacionária e neste caso temos automaticamente $I_a = I_b$. Se o elemento considerado for um capacitor não podemos ter correntes numa situação estacionária. Mas, como discutiremos numa seção posterior, mesmo no caso de capacitor podemos supor com uma excelente aproximação que $I_a = I_b$. Então em ambos os casos vamos supor a igualdade destas correntes e chamar esta corrente simplesmente de I. Se deixarmos passar um tempinho δt, uma carga $q = I\,\delta t$ entrará no elemento genérico, e no ponto b a mesma quantidade de carga $q = I\,\delta t$ sairá do elemento. Então o elemento genérico recebe uma carga com energia potencial $qV(a)$ e cede uma carga com energia potencial $qV(b)$. Concluímos que o

[2] Por exemplo, esta convenção é usada no livro de Paul Horowitz e Wifield Hill: *The Art of Electronics* Cambridge University Press1980 ISBN 0-521-37095-7.

elemento genérico de circuito ganhou a energia $qV(a) - qV(b)$. Este ganho de energia ocorreu num intervalo de tempo δt. Então podemos associar a este processo a potência $(qV(a) - qV(b))/\delta t$. Mas $q/\delta t$ é justamente a corrente *I*. Então ganhamos o seguinte resultado: um elemento de circuito no qual entra e sai uma corrente I recebe energia numa taxa

$$\boxed{P = I\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}} \tag{5.5.1}$$



Repare que nesta fórmula a definição do sentido positivo da corrente I coincide com o sentido da integração! A potência P também é um fluxo e precisa de uma definição de sentido positivo. Aqui definimos o sentido positivo como energia entrando no elemento de circuito como indicado na figura 5.5.6.

Fig. 5.5.6 Definição de sentido positivo de potência.

A seta grossa na figura 5.5.6 indica apenas o sentido positivo. Ela não significa que a energia entra exatamente naquele lugar pelo lado. Mesmo assim, a escolha lateral deve incomodar muitos leitores que esperam que a energia entre pelos fios. Mostraremos mais tarde, quase no final do semestre, que a energia de fato não flui pelos fios, mas entra mesmo dos lados para dentro dos condutores. O que flui nos fios são as cargas e carga não deve ser confundida com energia!

Em toda a análise de circuitos tenta-se eliminar o campo elétrico e substituí-lo por grandezas envolvendo correntes. Para o caso de o elemento genérico ser um condutor Ôhmico, podemos usar a fórmula (5.2.31). Ela deve ter sido um dos pontos de destaque da seção 5.2. Repito esta fórmula aqui em termos da integral do campo:

$$\boxed{\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = RI} \tag{5.5.2}$$

Repare que nesta fórmula a definição do sentido positivo da corrente I também coincide com o sentido da integração, como no caso da fórmula (5.5.1)! Substituindo a (5.5.2) na (5.5.1), obtemos para a potência que entra num resistor

$$\boxed{P = RI^2} \tag{5.5.3}$$

A resistência de um condutor Ôhmico é sempre positiva (consequência da segunda lei da termodinâmica) e P é sempre não negativo para um resistor.

No caso em que o elemento genérico é uma fonte, podemos usar a fórmula (5.4.9) que dever ter sido anotada como um dos pontos de destaque da seção 5.4. Como ela é muito importante, repito esta fórmula aqui:

$$\boxed{\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = R_{\text{int}}I - \mathcal{E}} \tag{5.5.4}$$

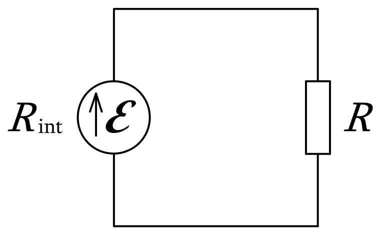
Nesta fórmula a definição do sentido positivo da corrente I e a seta de orientação que acompanha a definição da eletromotância $\mathcal{E}$ coincidem com o sentido da integração. Inserindo isto na (5.5.1), obtemos para a potência que a fonte recebe

$$\boxed{P = R_{\text{int}} I^2 - \mathcal{E} I} \tag{5.5.5}$$

Esta expressão pode ser tanto negativa como positiva. No uso normal de uma fonte, P seria negativo. Isto significa que a fonte fornece energia. Para uma célula eletroquímica nesta condição, o termo $\mathcal{E} I$ é a potência fornecida pela reação química e $R_{\text{int}} I^2$ é uma potência perdida que resulta na geração de energia térmica na célula. Mas muitas células eletroquímicas podem também ser usadas de tal forma que $P > 0$. Isto é o caso, por exemplo, quando carregamos uma bateria de carro.

A outra tarefa na análise de circuitos consiste na determinação das correntes. A solução deste problema é baseada em duas leis: a lei das malhas e a lei dos nós. Quando há mais de uma malha no circuito precisamos das duas leis. O primeiro passo na análise de circuito é a definição das incógnitas. Então se escolhem pontos no circuito e se definem correntes nestes pontos, cada uma com a devida seta de sentido positivo. Deve-se definir um número suficiente de correntes de tal forma que a corrente através de cada elemento possa ser expressa em termos das incógnitas. Depois se escolhem malhas de tal forma que cada elemento do circuito pertença a pelo menos uma malha. E depois podemos aplicar as leis para montar um sistema de equações e finalmente podemos resolver as equações e determinar os valores das incógnitas. Veremos como funciona a aplicação destas leis com alguns exemplos.

Fig. 5.5.7 Circuito simples de uma malha.



Começaremos com o circuito extremamente simples de uma única malha, mostrado na figura 5.5.7. Nesta figura indiquei ao lado do símbolo da fonte também a resistência interna da fonte. Esta deveria, na verdade, fazer parte do símbolo da fonte, do mesmo jeito como a variável $\mathcal{E}$. Mas não coloquei este dado na figura que definia o símbolo de fonte (5.4.4) porque na maioria dos casos se despreza a resistência interna da fonte. Aqui não vamos desprezar a resistência interna. Os dados R, R_{int} e $\mathcal{E}$ são considerados como conhecidos. A incógnita do problema é a corrente estacionária no circuito. Basta definir apenas uma corrente porque sabemos desde já que a corrente que passa pelo resistor tem o mesmo valor da corrente que passa pela fonte. Então o primeiro passo é desenhar uma seta de orientação do sentido positivo da incógnita.

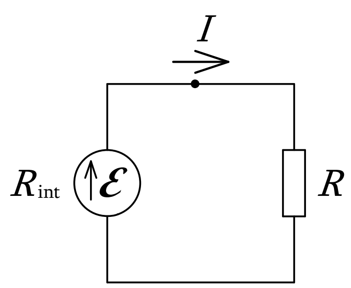


Fig. 5.5.8 Passo um da análise de circuito. Definição da incógnita com a seta de sentido positivo.

A escolha da orientação positiva da corrente é ao gosto do freguês. Uma outra escolha simplesmente mudará o sinal do resultado para I.

Depois da definição das incógnitas vem o passo da escolha de malhas. Neste exemplo não há muito que escolher, pois só há uma malha. No entanto, o que precisa ser escolhido mesmo neste caso simples é o sentido da integração para a integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ da leia de malha. De novo esta escolha é livre; ela não afeta os resultados, somente mudará todos os sinais na equação. Aqui vou escolher o sentido de integração coincidindo com as setas de I e de $\mathcal{E}$. Com esta escolha não precisamos introduzir sinais negativos nas fórmulas. No esquema de circuito podemos indicar a escolha do sentido de integração com uma seta como na figura 5.5.9.

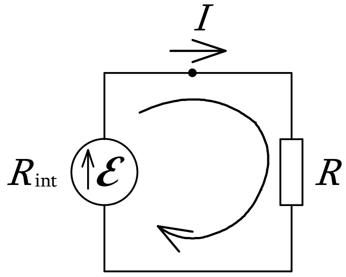


Fig. 5.5.9 Escolha de orientação da integração.

Com estes preparativos podemos percorrer a malha e escrever as contribuições dos elementos para a integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. As contribuições dos fios e do resistor são dadas pela fórmula (5.5.2) tomando para R da fórmula (5.5.2) os respectivos valores de resistência dos elementos. Mas no caso dos fios a resistência é desprezível e correspondentemente não precisamos pensar em contribuições deles. A contribuição da fonte é dada pela fórmula (5.5.4). Então percorrendo toda a malha temos:

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = R\,I + R_{\text{int}}\,I - \mathcal{E} \tag{5.5.6}$$

Resolvendo a equação para a incógnita, obtemos o resultado

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{int}}} \tag{5.5.7}$$

Com este resultado podemos avaliar os fluxos de energia. Com a fórmula (5.5.3) obtemos a potência elétrica que entra no resistor:

$$P = \frac{R}{\left(R + R_{\text{int}}\right)^2}\,\mathcal{E}^2 \tag{5.5.8}$$

A energia elétrica depositada no resistor aparece em forma de energia térmica e o resistor esquenta. Este efeito é chamado de efeito Joule[3] porque ele foi estudado quantitativamente por James Prescott Joule[4]. Nos ferros de passar roupa, nos chuveiros elétricos, nos ferros de solda, nas lâmpadas incandescentes e em inúmeros outros equipamentos, este efeito é usado para gerar calor. O efeito Joule era uma das manifestações secundárias da passagem de corrente que mencionamos na seção 5.1.

Há um problema interessante de otimização relacionado com o efeito Joule. Imagine que tenhamos uma fonte elétrica com as suas características R_{int} e $\mathcal{E}$ dadas. Queremos tirar energia desta fonte ligando um resistor e a meta é tirar a maior potência da fonte. Qual valor de resistência devemos escolher para obter a máxima potência?

Primeiramente vamos pensar se este problema tem uma solução bem definida. Olhemos primeiramente os extremos $R = 0$ (curto circuito) e $R = \infty$ (circuito aberto). Pela fórmula (5.5.7) percebemos que a corrente não diverge quando $R \to 0$. Consequentemente a potência se aproxima de zero, pois o fator R na fórmula (5.5.3) anula a potência neste limite. O limite de P também é zero quando mandamos R para infinito, pois na

---

[3] Joule, J.P. (1841). "On the Heat evolved by Metallic Conductors of Electricity, and in the Cells of a Battery during Electrolysis". *Philosophical Magazine* **19**: 260. doi:10.1080/14786444108650416

[4] James Prescott Joule (pronúncia: dʒuːl e não dʒaul) (24/12/1818 – 11/10/1889) deu grandes contribuições para a primeira lei da termodinâmica e para a teoria cinética dos gases. Ele também explicou o fenômeno do raio verde, que às vezes pode ser observado no pôr do sol.

fórmula (5.5.8) a resistência R aparece num quadrado no denominador e apenas linearmente no numerador. Entre estes extremos com potência zero há certamente potências positivas. Então deve existir algum máximo. Para achá-lo calculamos a derivada $\partial P/\partial R$ e procuramos um zero desta expressão:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)_{R_{\text{int}},\varepsilon} = \frac{2\left(R+R_{\text{int}}\right)R-\left(R+R_{\text{int}}\right)^2}{\left(R+R_{\text{int}}\right)^4}\,\varepsilon^2 \qquad (5.5.9)$$

Então o valor ótimo R_{ot} deve satisfazer a condição

$$2\left(R_{ot}+R_{\text{int}}\right)R_{ot} \;-\; \left(R_{ot}+R_{\text{int}}\right)R_{ot} \;-\; \left(R_{ot}+R_{\text{int}}\right)R_{\text{int}} \;=\; 0 \qquad (5.5.10)$$

ou

$$\left(R_{ot}+R_{\text{int}}\right)\left(R_{ot}-R_{\text{int}}\right) \;=\; 0 \qquad (5.5.11)$$

Como $R_{ot}+R_{\text{int}} \;>\; 0$, segue

$$R_{ot} \;=\; R_{\text{int}} \qquad (5.5.12)$$

Então devemos igualar a resistência externa à interna da fonte para poder obter o máximo de potência. Condições análogas aparecem em diversas outras transferências de energia. Chama-se esta condição de *princípio de casamento de impedância*. Impedância é uma generalização do conceito de resistência e mais para o final do semestre vamos falar mais sobre impedância. Os alunos da engenharia elétrica usarão o princípio de casamento de impedância na hora de acoplar um cabo numa antena ou na hora de projetar uma antena. Até na mecânica podemos encontrar este princípio. A potência elétrica é dada pelo produto de corrente e voltagem. Analogamente a potência mecânica é o produto de velocidade e força. Podemos realizar uma dada potência com uma corrente enorme e baixa voltagem (velocidade enorme e pouca força) ou com pouca corrente e alta tensão (movimento lento com muita força). Ao primeiro caso se associa uma baixa impedância e ao segundo uma alta impedância[5]. A fonte de energia e o receptor da energia, ambos são caracterizados por um valor de impedância. Para poder tirar a máxima potência de uma fonte, a impedância do receptor da energia tem que estar casada com a impedância da fonte. Há exemplos muito evidentes deste princípio que conhecemos da experiência cotidiana. Imaginem que eu fixe duas cunhas duras na parede da sala e estique um arame fino de aço entre as cunhas como desenhado na figura 5.5.10.

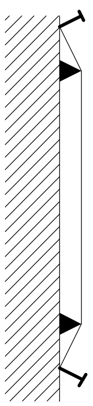


Fig. 5.5.10 Corda de aço esticada entre duas cunhas presas numa parede de concreto. Se excitamos oscilações da corda quase não se emite som dela.

Agora puxo a corda lateralmente e a boto para oscilar. Esta oscilação mecânica é uma fonte de energia e o ar por volta do arame de aço pode receber energia desta fonte e levá-la para longe em forma de onda sonora. Se eu fizesse tudo isto o que o senhor lá na última fileira da nossa sala enorme vai ouvir? Obviamente nada! O problema é o péssimo casamento de impedância da fonte com o receptor. As velocidades da corda são grandes, e a corda fina atravessa o ar praticamente sem exercer nenhuma força. Então temos um caso de baixíssima impedância que não casa com a

[5] De fato, na acústica se define a impedância não com a força, mas com a pressão. H. Gobrecht: Bergmann Schaefer Lehrbuch der Experimentalphysik Band I Mechanik Akustik Wärme Neunte Auflage De Gruyter 1975.

impedância característica das ondas sonoras no ar livre. Se, por outro lado, colocarmos estas cunhas com corda num corpo de violão e botamos a corda para vibrar, o senhor lá na última fila vai ouvir um som. No corpo do violão a vibração é transformada numa vibração de uma membrana de madeira de grande área. Para mover uma área de várias centenas de centímetros quadrados para frente e para trás no ar, precisa-se de um bocado de força. A membrana oscila com uma amplitude muito menor que a corda; então as velocidades também são menores. Então temos agora o caso de grande força e pouca velocidade, ou seja, o caso de alta impedância. O que o corpo do violão faz é uma *transformação de impedância* que possibilita a transmissão de energia com altas taxas[6]. Com esta discussão do violão nos afastamos dos assuntos da eletricidade, mas o caso da fonte elétrica com resistor externo nos mostrou um princípio universal tão importante que se justifica este desvio.

Qual é a diferença entre um engenheiro bom e um engenheiro ruim? Não estamos falando do engenheiro péssimo que não aprendeu nada na universidade. Então o engenheiro ruim aprendeu algo, por exemplo, o princípio de casamento de impedância. E logo ele vai aplicar este princípio em todas as situações. Já o bom engenheiro não vai aplicar o princípio de casamento de impedância em todos os casos porque ele sabe que o mais importante na otimização é entender a situação e escolher a meta apropriada para cada caso. E a meta de potência máxima não é sempre a melhor escolha. Olhem o que acontece na fonte de energia elétrica. Lá se dissipa a potência $R_{\text{int}} I^2$ gerando calor inutilmente. Com $R_{ot} = R_{\text{int}}$ esta potência jogada no lixo tem exatamente o mesmo valor daquela que se aproveita no resistor externo. Então em muitos casos não se escolhe a meta de maior potência, mas se tenta minimizar as perdas de energia. Para um dado resistor externo deve-se neste caso procurar uma fonte elétrica que tenha uma resistência interna menor possível.

Vamos chamar uma fonte elétrica de *fonte de voltagem ideal* se sua resistência interna for zero.

Naturalmente uma célula eletroquímica não tem uma resistência interna exatamente zero, mas podemos tratá-la como uma fonte de voltagem ideal se os valores de resistência existentes fora da célula forem muito maiores que a resistência interna da célula. Por exemplo, a resistência interna de uma "pilha" AA alcalina nova é menor que $0{,}5\ \Omega$. Se ligarmos resistores de alguns kΩ nesta pilha e se nossa exigência de precisão relativa ficar na faixa, digamos, de 1%, podemos tratar a pilha tranquilamente como fonte de voltagem ideal. Baterias de carro podem ter resistências internas ainda muito mais baixas, na ordem de alguns mili-Ohm. Falei "pilha" AA alcalina <u>nova</u>. É interessante ver em que difere uma pilha AA nova de uma "gasta". Nas pilhas AA também se dissolve zinco como na célula de Daniell. Mas geralmente uma pilha destas, quando ela é jogada fora por ser considerada "gasta", tem ainda muito zinco. Com o

[6] Na discussão da corda esticada, as características do receptor (ar) são fixas e as da fonte são variáveis. Isto sugere investigar esta modalidade também no caso do circuito. O leitor vai se surpreender com o fato de que a condição $\left(\partial P / \partial R_{\text{int}}\right)_{\mathcal{E},R} = 0$ não resulta na condição $\left(R_{\text{int}}\right)_{ot} = R$. Mas esta condição sai corretamente se otimizamos a potência dentro de um conjunto de fontes que são relacionadas por transformações de impedância. Nestas transformações a seguinte grandeza se mantém constante: $K = \mathcal{E}^2 / R_{\text{int}}$. Da condição $\left(\partial P / \partial R_{\text{int}}\right)_{K,R} = 0$ sai corretamente $\left(R_{\text{int}}\right)_{ot} = R$. Mais para o final do semestre, discutiremos os transformadores e a constância da grandeza K será explicada.

exercício E 5.4.1 ou com a fórmula de Nernst (5.4.6) sabemos também que a eletromotância da célula muda pouco por causa de alterações das concentrações iônicas pelo uso da pilha. O que realmente estraga a pilha e nos motiva a jogá-la fora são processos que aumentam a resistência interna da pilha. Com o resultado (5.5.7) percebemos que uma resistência interna alta limita a corrente que pode ser fornecida pela pilha.

As fontes reguláveis que apresentei na seção 5.1 chegam muito perto do caso da fonte de voltagem ideal enquanto a corrente se mantém menor que certo limite I_{lim} . Quando ligamos um resistor de resistência tão pequena na fonte regulável que a corrente iria ultrapassar o valor I_{lim}, a fonte regulável deixa de ser uma fonte de voltagem ideal e se transforma numa *fonte de corrente ideal*. Uma fonte de corrente ideal é uma que fornece sempre a mesma corrente independente do resistor que ligamos externamente. Naturalmente no mundo real não existem fontes de correntes ideais, mas dentro de certos regimes de operação uma fonte pode chegar perto deste ideal. Fontes ideais de corrente são representadas em esquemas eletrônicos com o símbolo mostrado na figura 5.5.11. Nas fontes reguláveis o valor de I_{lim} pode ser escolhido girando botões no painel do equipamento.

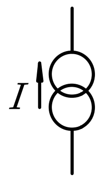


Fig. 5.5.11 Símbolo de fonte de corrente ideal.

Se colocarmos mais resistores na malha, aparecem simplesmente mais termos do tipo *RI* na lei de malha. Então a corrente num circuito como este da figura 5.5.12 seria

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_{\text{int}}} \tag{5.5.13}$$

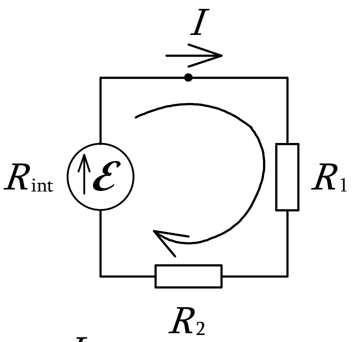


Fig. 5.5.12 Resistores em série num circuito de uma malha.

Comparando os circuitos das figuras 5.5.12 e 5.5.9 e as fórmulas (5.5.7) e (5.5.13) percebemos que a associação de resistores em série se comporta como um resistor cuja resistência é a soma das resistências que compõem a associação. Percebemos também que a resistência interna da fonte pode ser tratada como um resistor. Então uma fonte que não é fonte ideal de voltagem pode ser tratada como uma associação em série de uma fonte ideal de voltagem e um resistor de resistência R_{int}.

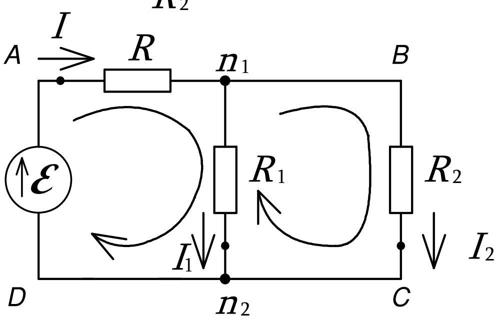


Fig. 5.5.13 Circuito com duas malhas.

Finalmente vamos encarar um exemplo de circuito com mais de uma malha. Vamos analisar o circuito da figura 5.5.13. Já coloquei as definições das incógnitas I, I_1 e I_2 na figura assim como uma escolha de duas malhas com escolhas de sentido de integração: $A \to n_1 \to n_2 \to D \to A$ e $n_1 \to B \to C \to n_2 \to n_1$.

Agora podemos escrever a lei das malhas para cada uma das malhas escolhidas. A malha que contém a fonte é simples:

$$-\mathcal{E} \quad + \quad R\,I \quad + \quad R_1\,I_1 \quad = \quad 0 \tag{5.5.14}$$

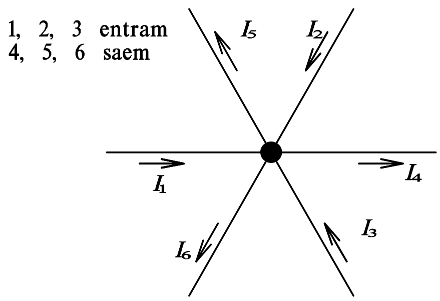
Neste exemplo desprezei a resistência interna da fonte. A segunda malha já é mais interessante, porque podemos aprender um ponto importante: repare que, ao percorrer esta segunda malha, atravessamos o resistor R_1 no sentido contrário da seta da corrente I_1. Consequentemente temos que acrescentar um sinal negativo para a contribuição deste elemento. Então a lei de malha desta segunda malha é

$$R_2 I_2 \quad - \quad R_1 I_1 \quad = \quad 0 \tag{5.5.15}$$

As equações (5.5.14) e (5.5.15) formam um sistema acoplado de equações. Mas temos três incógnitas e apenas duas equações. Então falta alguma informação essencial. O que falta é a lei dos nós.

Um nó num circuito é uma junção de vários fios, como exemplificado na figura 5.5.14. Em cada um destes fios devemos ter definido uma corrente, cada uma com o seu sentido positivo. Alguns destes sentidos podem apontar para o nó e alguns para fora do nó. As correntes cujas setas de sentido apontam para o nó vamos chamar de *correntes que entram no nó* e as outras de *correntes que saem do nó*. Então a lei dos nós afirma que numa situação estacionária a soma das correntes que entram tem que ser igual à soma das correntes que saem.

$$\sum_{e \text{ os que entram}} I_e \quad = \quad \sum_{s \text{ os que saem}} I_s \tag{5.5.16}$$



Nada impede de termos apenas correntes saindo ou apenas correntes entrando. Neste caso a soma de todas as correntes tem que ser zero.

Fig. 5.5.14 Nó com correntes entrando e saindo.

No caso do circuito da figura 5.5.13, temos dois nós que indiquei como n_1 e n_2. Ambos fornecem a mesma equação

$$I \quad = \quad I_1 \quad + \quad I_2 \tag{5.5.17}$$

Convém escrever o sistema de equações {(5.5.14), (5.5.15), (5.5.17)} de forma ordenada com todas as incógnitas num lado das equações e com o termo inhomogêneo[7] do outro lado:

$$\begin{array}{ccccccc} R\,I & + & R_1\,I_1 & & & = & \mathcal{E} \\ & - & R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & = & 0 \\ I & - & I_1 & - & I_2 & = & 0 \end{array} \tag{5.5.18}$$

A visibilidade da tarefa fica ainda melhor se escrevermos este sistema de equações em forma matricial:

[7] Termo usado na literatura técnica matemática que não é reconhecido pelos filólogos do Português por ser uma mistura de Grego e Latim.

$$\begin{pmatrix} R & R_1 & 0 \\ 0 & -R_1 & R_2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.5.19}$$

Podemos resolver este sistema com a regra de Cramer[8]. Embora para grandes sistemas de equações a regra de Cramer não é o melhor método[9], ela é bonita e fácil de lembrar. Esta regra funciona da seguinte forma: Seja

$$M\,X = Y \tag{5.5.20}$$

um sistema de equações, onde M é uma matriz $N \times N$, X e Y são matrizes coluna, ou seja, matrizes $N \times 1$, sendo X a incógnita do sistema. Então a k-ésima entrada da incógnita X é

$$X_k = \frac{\det\big(\overset{\overset{k}{\downarrow}}{\Lambda Y I}\big)}{\det(M)} \tag{5.5.21}$$

O símbolo engraçado no determinante do numerador é a matriz M na qual a coluna número k foi "amputada" e substituída pela matriz coluna Y.

Então para o nosso sistema temos que "amputar" a coluna $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e substituí-la pela coluna $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para obter o valor de I, substituir a coluna $\begin{pmatrix} R_1 \\ -R_1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pela coluna $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para obter o valor de I_1 e substituir a coluna $\begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pela coluna $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para obter o valor de I_2.

E temos que calcular os determinantes:

$$I = \frac{\varepsilon(R_1 + R_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \tag{5.5.22}$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \tag{5.5.23}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \tag{5.5.24}$$

---

[8] Gabriel Cramer (31/06/1704 – 04/01/1752) publicou este método em 1850. Gabriel Cramer: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.* Genf 1750, S. 657–659. Para os casos especiais de duas e três equações Colin Maclaurin (Fevereiro/1698 – 14/06/1746) tinha encontrado este método antes, mas não sabia como generalizá-lo para mais de três equações. Este resultado foi publicado na obra „Treatise of Algebra" no ano 1848, ou seja, dois anos após a morte de Maclaurin. Historiadores de matemática encontraram muito mais tarde um manuscrito do filósofo, matemático, físico e diplomata Gottfried Wilhelm Leibniz (21/06 [Calendário Juliano] ou 01 /07 [Cal. Gregoriano] 1646 in – 14/11/1716) do ano 1678 contendo uma descrição do método.

[9] O método de eliminação de Gauss usa menos tempo de computação e é numericamente mais estável.

É interessante reescrever o resultado da corrente I dividindo o numerador e o denominador por $(R_1 + R_2)$:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \tag{5.5.25}$$

Comparando as figuras 5.5.12 e 5.5.13 (com $R_{\text{int}} = 0$) e as fórmulas (5.5.13) e (5.5.25), percebemos que a associação dos resistores R_1 e R_2 em paralelo equivale a um resistor de resistência

$$R_{1\|2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{5.5.26}$$

As associações em série e paralelas de resistores podem ser usadas para fabricar valores de resistência que faltam na coleção de componentes. Esta técnica de criar novos valores é parecida com o caso dos capacitores, porém as fórmulas dos casos série-paralelo são invertidas!

A escolha de malhas que fizemos para a análise do circuito da figura 5.5.13 não é a única possível. Pode-se escolher também uma malha grande, que passa pela fonte, pelo resistor R e finalmente pelo R_2, e uma das malhas pequenas que eu desenhei. Esta escolha vai fornecer equações diferentes, mas o resultado seria o mesmo. Que tal escolher a malha grande e as duas malhas pequenas? Pode-se fazer isto obtendo um sistema maior de equações contendo dependências lineares. Ou seja, isto acrescenta simplesmente uma equação redundante e somente aumenta o trabalho.

Em cada ramo r de um circuito, isto é, em cada ligação entre dois nós, flui uma determinada corrente I_r que constitui uma das incógnitas na análise de circuito. Cada nó do circuito fornece uma equação, com exceção do último nó, pois as correntes que entram neste último nó são as que saem do resto do circuito e vice versa. Se há $\mathscr{R}$ ramos no circuito e $\mathscr{N}$ nós, restam $\mathscr{R} - \mathscr{N} + 1$ graus de liberdade e é este o número de equações linearmente independentes que precisam ser estabelecidas com equação de malhas.

Para o circuito de duas malhas a tarefa de montar e resolver as equações não era muito complicada. Mas os engenheiros de eletrônica às vezes têm que enfrentar circuitos de uma meia dúzia de malhas e nestes casos a tarefa matemática já fica mais incômoda. Para estas situações é conveniente usar menos incógnitas e menos equações desde o início. Esta redução de trabalho pode ser alcançada introduzindo incógnitas auxiliares. Esta técnica tem certa semelhança com a introdução do potencial elétrico na eletrostática. Na eletrostática temos que resolver duas equações diferenciais, a saber, as equações $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ e $\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$. A primeira equação pode ser resolvida de graça escrevendo o campo elétrico com a incógnita auxiliar V na forma $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. Desta maneira resta somente um problema para ser resolvido. Na análise de circuito temos uma situação semelhante. Temos que encontrar correntes I_r que satisfazem duas leis: a lei de conservação de carga e a lei da existência do potencial. Podemos garantir a lei de conservação de carga, ou seja, as leis dos nós, de graça se escrevermos todas as correntes I_r como somas ou diferenças de correntes que circulam. Uma corrente estacionária que circula sem bifurcação automaticamente satisfaz a conservação de carga.

Depois de escolher as malhas, pode-se introduzir uma corrente $\Im_m$ circulatória para cada malha m. A corrente I_r de um ramo r é a soma das correntes $\Im_m$ que atravessam o ramo r no sentido de I_r menos a soma das correntes $\Im_m$ que atravessam o ramo r no sentido oposto desta corrente. A figura 5.5.15 dá um exemplo da introdução de correntes de malha e sua relação com uma corrente de ramo que pode ser medida com um amperímetro. Neste exemplo uma corrente de ramo I_2 é mostrada e três correntes de malha são definidas. No caso vale $I_2 = \mathcal{J}_C - \mathcal{J}_A - \mathcal{J}_B$.

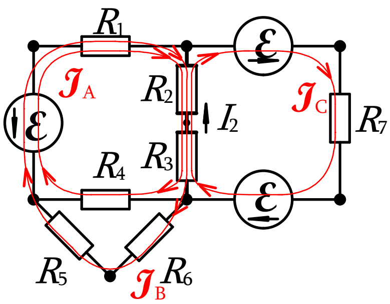


Fig. 5.5.15 Exemplo de definição de correntes de malha.

Vamos praticar esta técnica com o exemplo do circuito da figura 5.5.13. Com as malhas $A = A \to n_1 \to n_2 \to D \to A$ e $B = n_1 \to B \to C \to n_2 \to n_1$ temos $I = \mathcal{J}_A$, $I_1 = \mathcal{J}_A - \mathcal{J}_B$ e $I_2 = \mathcal{J}_B$. Com isto as duas leis de malha fornecem um sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{array}{rcrcl} (R+R_1)\mathcal{J}_A & - & R_1\mathcal{J}_B & = & \mathcal{E} \\ -\;R_1\mathcal{J}_A & + & (R_1+R_2)\mathcal{J}_B & = & 0 \end{array} \qquad (5.5.27)$$

Naturalmente a solução deste sistema fornece os mesmos resultados (5.5.22), (5.5.23) e (5.5.24); compare exercício E.5.5.1.

Veremos mais um exemplo de circuito de duas malhas, desta vez envolvendo uma fonte ideal de corrente, como indicado na figura 5.5.16.

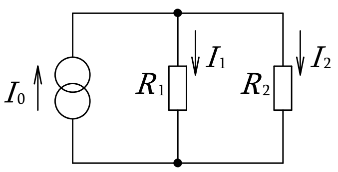


Fig. 5.5.16 Circuito com fonte ideal de corrente.

Temos a malha formada pela fonte e o resistor R_1 e a malha formada por R_1 e R_2. Mas para a malha que envolve a fonte de corrente ideal as nossas fórmulas não se aplicam. O que podemos fazer? Não há problema algum! Não precisamos escrever a lei das malhas para a malha que contém a fonte. Basta a malha dos resistores e a lei dos nós porque temos apenas duas incógnitas, pois I_0 é uma característica da fonte e não é incógnita. Então obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{rcl} -R_1I_1 + R_2I_2 & = & 0 \\ I_1 + I_2 & = & I_0 \end{array} \qquad (5.5.28)$$

A solução deste sistema é

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}I_0 \quad , \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}I_0 \qquad (5.5.29)$$

Olhando a expressão da corrente I_2, percebemos que a associação da fonte de corrente ideal com o resistor R_1 se comporta como uma fonte com eletromotância $\mathcal{E} = R_1 I_0$ e resistência interna $R_{\text{int}} = R_1$.

Exercícios

E 5.5.1: Use a regra de Cramer para resolver o sistema de equações (5.5.27) e verifique se saem de novo os resultados (5.5.22), (5.5.23) e (5.5.24).

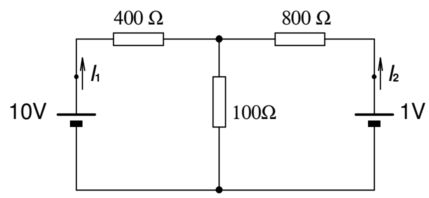


Fig. 5.5.17 Circuito do exercício 5.5.2.

E 5.5.2: Duas baterias de eletromotância 10V e 1 V e resistência interna desprezível estão ligadas no circuito da figura 5.5.17. Calcule as corrente I_1 e I_2. Calcule a taxa de transferência de energia do campo elétrico para cada um dos elementos do circuito. Repare nos sinais destas taxas! Quais dos elementos recebem energia?

E 5.5.3: Uma resistência de chuveiro elétrico é construída de tal maneira que ela entrega 4 kW se ela for ligada numa fonte de 127V. Na instalação de uma casa ele é ligado na rede de 127V através de fios de cobre de 1 mm de diâmetro e $2\times 20\,\mathrm{m}$ (ida e volta) de comprimento. Calcule qual é a potência térmica que esta resistência irá entregar à água, qual é a potência tirada da rede elétrica e qual é a potência gasta inutilmente na fiação na parede. Calcule como seriam estes valores se tivéssemos 220V na instalação com um chuveiro que entrega 4 kW quando ligado a 220 V. Dado: resistividade do cobre = $0{,}0172\,\Omega\,(\mathrm{mm})^2\,\mathrm{m}^{-1}$.

E 5.5.4: Diferentes resistores são ligados numa fonte. Variando os valores das resistências, criam-se pares de valores de corrente de voltagem que podem ser representados num gráfico que mostra as voltagens no eixo horizontal e as correntes no eixo vertical. Esboce o gráfico correspondente para o caso de: (a) uma fonte de voltagem ideal, (b) uma fonte de corrente ideal, (c) uma pilha voltaica real.

E 5.5.5: Explique por que a segunda lei da termodinâmica proíbe a existência de condutores Ôhmicos com resistência negativa!

E 5.5.6: Escreva os pontos de destaque desta seção.

5.5 Apêndice

A maioria dos resistores em forma cilíndrica possui 4 anéis coloridos. Os dois primeiros codificam cifras, o terceiro anel codifica um número de zeros que vem depois destas cifras para formar o valor da resistência em Ohm. O quarto anel informa sobre a tolerância do valor, ou seja, o quanto o verdadeiro valor da resistência pode diferir do valor indicado pelos primeiros anéis. Com resistores com pequena tolerância pode haver mais anéis aumentando o número de algarismos significativos. A tabela mostra os significados das cores:

Tabela 5.5.1 Código de cores dos resistores

cor	número	tolerância
preto	0	-
marrom	1	1%
vermelho	2	2%
laranja	3	-
amarelo	4	
verde	5	0.5%
azul	6	0,25%
violeta	7	0,1%
cinza	8	
branco	9	
ouro		5%
prata		10%
sem		20%

As figuras 5.5.18 - 5.5.20 apresentam exemplos de resistores.

Fig. 5.5.18 Resistor de $47\,k\Omega \pm 5\%$.

Fig. 5.5.19 Resistor de $1,0\,k\Omega \pm 5\%$.

Fig. 5.5.20 Resistor de $1,00\,k\Omega \pm 1\%$.

Repare nos anéis coloridos da figura 5.5.17. Os anéis de cor amarela e violeta fornecem as cifras 47. Depois vem um anel laranja e este nos informa que devemos colocar três zeros depois das cifras anteriores. Então obtemos o número 47000 que, multiplicado com um Ω, indica um valor de $47\,k\Omega$. O último anel indica a tolerância, ele é dourado, então a tolerância vale 5%. Na figura 5.5.18 temos um marrom e um preto que dão as cifras 10. Depois vem um vermelho; então temos que colocar dois zeros, e isto resulta em $1,0\,k\Omega$. Agora repare na figura 5.5.19! Este resistor também é de um $k\Omega$, mas o último anel, que indica a tolerância, é marrom. Com uma tolerância de apenas 1% se justifica mais um algarismo significativo. Então este resistor tem três anéis de cifras e estes são 100. Depois vem mais um anel marrom que nos obriga a colocar mais um zero e obtemos de novo um $k\Omega$.

Nos resistores no formato SMD vem um número escrito que pode ser lido com uma lupa de relojoeiro. Mas este número também tem seus segredos de interpretação. Por exemplo, um 122 não significa uma resistência de 122 Ohm, mas o significado é $1,2\,k\Omega$. O último 2 tem o significado de um número de zeros postos após as primeiras cifras.

Os técnicos em eletrônica têm um hábito preguiçoso de escrever valores de resistência. A letra Ω é omitida e um simples k já é entendido como $k\Omega$. Mas se tiver que escrever um valor de apenas $10\,\Omega$? Neste caso eles preferem substituir o Omega pela letra R. Além disso, com valores que têm cifras interessantes após a vírgula, eles usam a unidade para substituir a vírgula. A tabela 5.5.2 mostra uns exemplos de valores.

Tabela 5.5.2 Exemplos da nomenclatura técnica de valores.

Escrita científica	Escrita dos técnicos
$10\,k\Omega$	10k
$1,2\,k\Omega$	1k2
$100\,\Omega$	100R
$6,8\,\Omega$	6R8